Soyons positifs : la complétude de la théorie naïve des ensembles[*]

par

Marcel Crabbé

1 Introduction : la logique à deux valeurs

Dans la logique classique, qui nous a été léguée par Aristote, on retient deux principes fondamentaux, le principe de contradiction et le principe du tiers-exclu.

Le principe de contradiction est l'affirmation qu'un énoncé ne peut être à la fois vrai et faux. Cela revient à dire que ce qui est vrai n'est pas faux et que ce qui est faux n'est pas vrai.

Le principe du tiers-exclu est l'affirmation qu'un énoncé est vrai ou faux. Cela revient à dire que ce qui n'est pas vrai est faux et que ce qui n'est pas faux est vrai.

En combinant ces deux principes on arrive à la conclusion qu'un énoncé est vrai ssi[1] il n'est pas faux et qu'il est faux ssi il n'est pas vrai.

Le principe du tiers-exclu a été mis en question très tôt en raison de l'existence d'énoncés qu'on ne saurait, sans coup de force, considérer comme étant vrais ou faux. Ceci a mené à la logique partielle à deux valeurs, qui est assimilée à une logique à trois valeurs.

---

[*] Ce texte est celui de l'article du même titre, paru dans le volume 7 des *Cahiers du Centre de Logique* en 1992, à ceci près que, outre des corrections mineures, la section 3.2 a été remaniée en utilisant des idées de l'article « The Hauptsatz for stratified comprehension: a semantic proof », paru dans *Mathematical Logic Quarterly*, 40 :481–489, 1994.

[1] « ssi » abrège « si et seulement si ».

Cette logique partielle a été alors utilisée pour résoudre les antinomies. Cependant, l'examen de ces antinomies ne révèle pas tant la présence d'énoncés dépourvus de valeur de vérité que d'énoncés qui en sont surchargés. Ces énoncés *gloutons* sont de véritables contradictions, comme le constate notamment Hegel ([5]) à propos du menteur d'Euboulide de Milet :

> *... er redet wahr und lügt zugleich, und die Wahrheit ist dieser Widerspruch. ... Diese Sophismen sind nicht Schein eines Widerspruchs, sondern es ist wirklicher Widerspruch vorhanden*[2].

La vérité est que la contradiction est réelle et non pas apparente. La méthode hégélienne pour résoudre les paradoxes est donc très simple : la solution du problème réside dans le fait qu'il n'y a pas de problème. Ce n'est pas l'antinomie qui est apparente mais plutôt le problème. Si on s'oriente dans cette voie, on est conduit vers une logique gloutonne ou contradictoire[3] à deux valeurs où chaque énoncé est certes vrai ou faux mais où certains énoncés pourraient être vrais et faux à la fois. Le principe du tiers-exclu y sera évidemment vrai, mais le principe de contradiction également : il est toujours faux que A est vrai et que A est faux. Seulement, dans certains cas, cela pourrait être vrai aussi.

On qualifiera de *gloutonne* une logique dans laquelle tout énoncé reçoit une valeur de vérité. On qualifiera de *partielle* une logique dans laquelle un énoncé ne peut recevoir plus d'une valeur de vérité. Une logique est donc partielle et gloutonne lorsque l'assignation des valeurs de vérité est une fonction totale.

La logique classique est dès lors envisageable, soit comme une logique partielle et gloutonne à deux valeurs, soit comme une logique partielle à une valeur de vérité : le « vrai[4] ».

[2]« *... il parle vrai et ment à la fois, et la vérité est cette contradiction. ... Ces sophismes ne sont pas l'apparence d'une contradiction, on a plutôt affaire à de la véritable contradiction.* »

[3]On trouvera dans l'ouvrage de G. Priest ([7]) une plaidoirie en faveur de cette logique.

[4]Il va sans dire que la logique gloutonne à une seule valeur ne nous concernera pas.

2 Les modèles gloutons

2.1 Langages

Les langages que nous utiliserons seront toujours dénombrables et possèderont une infinité de variables. Les formules *atomiques* sont de la forme $Rt_1 \dots t_n$, où R est un symbole relationnel d'arité n et $t_1 \dots t_n$ une suite de termes de longueur n. On écrira, en abrégé, $R\vec{t}$. Les formules sont construites à partir des formules atomiques utilisant les connecteurs logiques usuels ($\exists$, $\forall$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ et $\neg$).

Les variables font partie de l'ensemble des *termes*. À la différence des langages de premier ordre, les termes pourront contenir des variables (y ayant des occurrences) liées[5]. Nous supposerons seulement que l'ensemble des termes est fermé pour la substitution[6] : si t est un terme, $\vec{s}$ une suite de termes et $\vec{x}$ une suite de même longueur de variables distinctes, alors $t[\vec{x} := \vec{s}]$ est le terme obtenu en remplaçant (simultanément), dans t, les occurrences (libres) de chaque variable de $\vec{x}$ par le terme correspondant de $\vec{s}$. Il est à noter que nous n'excluons pas qu'il y ait des formules apparaissant dans les termes, comme c'est le cas pour le langage, avec termes, de la théorie des ensembles.

Nous identifierons les expressions ne différant que par les variables liées : toutes les variables liées seront censées être des carrés de Bourbaki ; en toute rigueur, il n'y a donc pas de variables liées.

2.2 Modèles gloutons

Un modèle $\mathcal{M}$ comprend un *univers* $|\mathcal{M}|$ qui est un ensemble non vide et d'autres ingrédients dont nous parlerons sous peu. Une *valuation* v dans $\mathcal{M}$ est une fonction dont le domaine est l'ensemble des variables et dont l'image est une partie de $|\mathcal{M}|$.

Si v est une valuation, $\vec{x}$ une suite de variables distinctes et $\vec{a}$ une suite de même longueur d'éléments de $|\mathcal{M}|$, $v[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{a}\,]$ est la valuation définie comme suit :

[5] On songe ici à des expressions de l'analyse, de la théorie des ensembles ou du calcul lambda, par exemple.

[6] Tous les raffinements sont permis : on peut, par exemple se contenter d'une notion de substitution abstraite comme celle de [1].

$v[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{a}](x) = a$ si x est dans $\vec{x}$ et a est l'élément correspondant de $\vec{a}$,
$v[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{a}](y) = v(y)$, si y n'est pas dans $\vec{x}$.

Étant donné un modèle $\mathcal{M}$ et une valuation v dans $\mathcal{M}$, on peut définir la *vérité* (notée $\mathcal{M}, v \models^+$) et la *fausseté* (notée $\mathcal{M}, v \models^-$) des formules du langage par induction sur leur structure pourvu que l'on ait déterminé la vérité et la fausseté des formules atomiques :

$\mathcal{M}, v \models^+ \neg A$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^- A$
$\mathcal{M}, v \models^- \neg A$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^+ A$
$\mathcal{M}, v \models^+ A \wedge B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^+ A$ et $\mathcal{M}, v \models^+ B$
$\mathcal{M}, v \models^- A \wedge B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^- A$ et/ou $\mathcal{M}, v \models^- B$
$\mathcal{M}, v \models^+ A \vee B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^+ A$ et/ou $\mathcal{M}, v \models^+ B$
$\mathcal{M}, v \models^- A \vee B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^- A$ et $\mathcal{M}, v \models^- B$
$\mathcal{M}, v \models^+ A \rightarrow B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^- A$ et/ou $\mathcal{M}, v \models^+ B$
$\mathcal{M}, v \models^- A \rightarrow B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^+ A$ et $\mathcal{M}, v \models^- B$
$\mathcal{M}, v \models^+ A \leftrightarrow B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^+ A$ et $\mathcal{M}, v \models^+ B$ et/ou $\mathcal{M}, v \models^- A$ et $\mathcal{M}, v \models^- B$
$\mathcal{M}, v \models^- A \leftrightarrow B$	ssi	$\mathcal{M}, v \models^+ A$ et $\mathcal{M}, v \models^- B$ et/ou $\mathcal{M}, v \models^- A$ et $\mathcal{M}, v \models^+ B$
$\mathcal{M}, v \models^+ \forall x\, A$	ssi[7]	$\mathcal{M}, v[x \rightsquigarrow a] \models^+ A$, pour tout élément a de $\lvert\mathcal{M}\rvert$
$\mathcal{M}, v \models^- \forall x\, A$	ssi	$\mathcal{M}, v[x \rightsquigarrow a] \models^- A$, pour au moins un élément a de $\lvert\mathcal{M}\rvert$
$\mathcal{M}, v \models^+ \exists x\, A$	ssi	$\mathcal{M}, v[x \rightsquigarrow a] \models^+ A$, pour au moins un élément a de $\lvert\mathcal{M}\rvert$
$\mathcal{M}, v \models^- \exists x\, A$	ssi	$\mathcal{M}, v[x \rightsquigarrow a] \models^- A$, pour tout élément a de $\lvert\mathcal{M}\rvert$.

[7]Pour que ce type de définition ne soit pas ambigu lorsqu'on utilise les carrés de Bourbaki, on demande que x soit la première variable de la liste des variables qui ne figure pas dans $\forall x\, A$.

Cette définition de la vérité, due à Tarski, suppose donc seulement que l'on détermine $\mathcal{M}, v \models^+ R\vec{t}$ et $\mathcal{M}, v \models^- R\vec{t}$, pour chaque formule atomique.

Pour ce faire, on complète la notion de modèle en associant à chaque terme t, une fonction, $\mathcal{M}(t)$, de l'ensemble des valuations (dans $\mathcal{M}$) dans $|\mathcal{M}|$. On demande, comme c'est l'usage, que $\mathcal{M}(t)(v)$ ne dépende que de la valeur de v aux variables (libres) de t [8], que $\mathcal{M}(x)(v) = v(x)$, pour chaque variable x et que $\mathcal{M}(t)[\vec{x} := \vec{s}])(v) = \mathcal{M}(t)(v[\vec{x} \rightsquigarrow \mathcal{M}(\vec{s})(v)])$ [9], pour chaque terme t et suite $\vec{s}$.

Enfin, on associe à chaque symbole relationnel du langage une *relation* de même arité sur l'univers. Cette relation va déterminer les n-uples d'éléments de l'univers qui vérifient la relation ainsi que ceux qui la falsifient. C'est ici que plusieurs portes peuvent s'ouvrir. Dans l'approche classique, une relation est simplement un ensemble de n-uples d'éléments de l'univers, à savoir l'ensemble de ceux qui la vérifient. Les n-uples qui n'appartiennent pas à la relation sont ceux qui la falsifient.

Une relation classique ρ sur $|\mathcal{M}|$ est donc assimilable à un couple d'ensembles de n-uples d'éléments de l'univers : $\rho = \langle \rho^+, \rho^- \rangle$, où ρ^+ est l'ensemble des n-uples qui sont dans la relation et ρ^- est l'ensemble des n-uples qui ne sont pas dans la relation. ρ^- est donc le complémentaire de ρ^+ : $\rho^+ \cap \rho^- = \varnothing$ et $\rho^+ \cup \rho^- = |\mathcal{M}|^n$.

Si nous sommes positifs, nous ne sommes plus tenus de considérer chaque pôle de la relation comme le négatif de l'autre. Et nous sommes autorisés à prendre en considération les cas où on postule seulement $\rho^+ \cap \rho^- = \varnothing$ ou seulement $\rho^+ \cup \rho^- = |\mathcal{M}|^n$. Dans le premier cas on a une relation *partielle*. Dans le second cas on a une relation *gloutonne*. Une relation *classique* est donc partielle et gloutonne. Une relation partielle pourrait ne pas déterminer pour chaque n-uple s'il est vrai qu'il est dans la relation ou si c'est faux. Elle peut présenter des lacunes (« gaps »). En revanche, une relation gloutonne peut en dire trop, avec comme conséquence que la relation est, pour certains n-uples, à la fois vraie et fausse ; elle peut être bourrée (avoir des « gluts »). Nous considérerons essentiellement les modèles avec relations gloutonnes.

[8] $\mathcal{M}(t)(v) = \mathcal{M}(t)(v')$ si $v(x) = v'(x)$, pour toute variable x de t.

[9] Si $\vec{s}$ est la suite $s_1 \dots s_n$, $\mathcal{M}(\vec{s})(v)$ est la suite $\mathcal{M}(s_1)(v) \dots \mathcal{M}(s_n)(v)$.

Définition

Un *modèle glouton* $\mathcal{M}$ pour un langage est composé d'un univers $|\mathcal{M}|$, qui est un ensemble non vide, et d'une interprétation des termes et des symboles relationnels du langage. Cette interprétation associe à chaque terme t une fonction $\mathcal{M}(t)$ de l'ensemble des valuations (dans $\mathcal{M}$) dans $|\mathcal{M}|$ (vérifiant les conditions données plus haut) et à chaque symbole relationnel d'arité n une *relation gloutonne* n-aire, $\mathcal{M}(R)$, sur l'univers, c'est-à-dire un couple $\langle \mathcal{M}(R)^+, \mathcal{M}(R)^- \rangle$ de sous-ensembles de $|\mathcal{M}|^n$ tel que $\mathcal{M}(R)^+ \cup \mathcal{M}(R)^- = |\mathcal{M}|^n$.

Nous sommes maintenant en mesure de compléter les définitions de vérité et de fausseté :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}, v \models^+ Rt_1, \ldots, t_n & \text{ssi} & \langle \mathcal{M}(t_1)(v), \ldots, \mathcal{M}(t_n)(v) \rangle \in \mathcal{M}(R)^+ \\ \mathcal{M}, v \models^- Rt_1, \ldots, t_n & \text{ssi} & \langle \mathcal{M}(t_1)(v), \ldots, \mathcal{M}(t_n)(v) \rangle \in \mathcal{M}(R)^-. \end{array}$$

Proposition

Si $v(x) = v'(x)$, pour toute variable (libre) de A, alors
$\mathcal{M}, v \models^+ A$ ssi $\mathcal{M}, v' \models^+ A$, et $\mathcal{M}, v \models^- A$ ssi $\mathcal{M}, v' \models^- A$.
$\mathcal{M}, v[\vec{x} \rightsquigarrow \mathcal{M}(\vec{t})(v)] \models^+ A$ ssi $\mathcal{M}, v \models^+ A[\vec{x} := \vec{t}]$.
$\mathcal{M}, v[\vec{x} \rightsquigarrow \mathcal{M}(\vec{t})(v)] \models^- A$ ssi $\mathcal{M}, v \models^- A[\vec{x} := \vec{t}]$.
Si $\mathcal{M}, v \models^+ \forall x\, A$, alors $\mathcal{M}, v \models^+ A[x := t]$.
Si $\mathcal{M}, v \models^- A[x := t]$, alors $\mathcal{M}, v \models^- \forall x\, A$.
Si $\mathcal{M}, v \models^+ A[x := t]$, alors $\mathcal{M}, v \models^+ \exists x\, A$.
Si $\mathcal{M}, v \models^- \exists x\, A$, alors $\mathcal{M}, v \models^- A[x := t]$.

Démonstration par induction sur la structure des formules. Cette proposition sera fréquemment utilisée dans la suite sans qu'on y fasse référence.

2.3 La persistance

Définition

$\mathcal{N}$ est une *restriction* de $\mathcal{M}$, ce qu'on écrit $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, lorsque $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}|$, $\mathcal{N}(t) = \mathcal{M}(t)$, pour tout terme t, et $\mathcal{N}(R)^+ \subseteq \mathcal{M}(R)^+$, $\mathcal{N}(R)^- \subseteq \mathcal{M}(R)^-$, pour tout symbole relationnel R.

Théorème de persistance

> *Si* $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$*, alors* $\mathcal{N}, v \models^{+} A$ *implique* $\mathcal{M}, v \models^{+} A$ *et* $\mathcal{N}, v \models^{-} A$ *implique* $\mathcal{M}, v \models^{-} A$*.*

La démonstration inductive ne présente pas de difficulté.

Définition

A est *valide* dans $\mathcal{M}$ ssi $\mathcal{M}, v \models^{+} A$, pour toute valuation v.

Corollaire

> *A est une loi logique*[10] *ssi A est valide dans tous les modèles gloutons.*

Démonstration. Appellons *modèle classique* un modèle glouton $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}(R)^{+} \cap \mathcal{M}(R)^{-} = \varnothing$, pour tout symbole relationnel R. Il est évident que A est une loi logique ssi A est valide dans tout modèle classique.

Comme tout modèle classique est glouton, il suffit de montrer que si A est valide dans tout modèle classique, A est valide dans tout modèle glouton. Le théorème de persistance entraîne que si A n'est pas valide dans un modèle glouton, il n'est pas valide dans ses restrictions classiques. Il reste donc à remarquer que tout modèle glouton a une restriction classique.

En effet, soit un modèle glouton $\mathcal{M}$. On définit un modèle $\mathcal{M}^{*}$, de même univers et même interprétation des termes en posant, pour chaque symbole relationnel R d'arité n,

$$\mathcal{M}^{*}(R)^{+} = \mathcal{M}(R)^{+} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{*}(R)^{-} = |\mathcal{M}^{n}| \setminus \mathcal{M}(R)^{+}.$$

$\mathcal{M}^{*}$ est un modèle classique tel que $\mathcal{M}^{*} \prec \mathcal{M}$. □

Ce corollaire implique, notamment, que toutes les formules de la forme $A \vee \neg A$, $A \to A$ et $\neg(A \wedge \neg A)$ sont valides dans tout modèle glouton.

[10] Au sens usuel.

Ceci contribue a montrer le caractère conservateur de la logique gloutonne. Les lois gloutonnes sont exactement les mêmes que les lois classiques. Il en va tout autrement pour la logique partielle. En effet aucune formule n'est valide dans tout modèle partiel.

2.4 Les paradoxes

Les paradoxes du menteur et de Russell sont les paradigmes des paradoxes sémantiques et logiques, selon la classification de Ramsey. Malgré leurs différences, ce qui fait problème dans les deux cas, c'est la dérivation d'une contradiction à partir de principes fondamentaux qui gouvernent des entités logiques de base, en l'occurrence la vérité et les ensembles.

Ces principes sont, d'une part, la condition de Tarski, reflétant la définition de la vérité dite « correspondance » :

La phrase « A » est vraie si et seulement si A,

et, d'autre part, le principe de compréhension :

$$t \in \{ x \mid A \} \text{ si et seulement si } A[x := t].$$

D'un point de vue syntaxique, les phrases « A » *est vraie* et $t \in \{ x \mid A \}$ sont des formules atomiques alors que A et $A[x := t]$ ne le sont pas nécessairement. Les deux principes établissent donc l'équivalence entre des formules et des formules atomiques. On peut scinder ces principes en deux implications qui chacune en elle-même ne fait pas problème :

si A, alors la phrase « A » est vraie,
si la phrase « A » est vraie, alors A.

et, pour les ensembles,

$$\text{si } A[x := t], \text{ alors } t \in \{ x \mid A \},$$
$$\text{si } t \in \{ x \mid A \}, \text{ alors } A[x := t].$$

On peut décrire la première implication comme un passage du concret à l'abstrait et la seconde comme l'opération inverse de concrétisation.

Il serait possible de donner une solution hégélienne uniforme des paradoxes dans un cadre abstrait en introduisant des opérations de concrétisation qui transforment les formules atomiques en formules. Toutefois, pour fixer les idées, nous allons nous limiter à la théorie naïve des ensembles. Le langage de cette théorie peut contenir des termes et des symboles relationnels de toute espèce. Nous supposons seulement qu'il y a parmi les symboles relationnels un symbole binaire $\in$ et que, pour toute formule A, il y a un terme $\{\, x \mid A \,\}$ (les occurrences de x sont liées)[11]. $\in ts$ sera noté $t \in s$. Pour rendre compte adéquatement du principe de compréhension, il faut enrichir la notion de modèle glouton :

Définition

Un modèle glouton $\mathcal{M}$ est *compréhensif* ssi il a la propriété suivante, pour toute valuation v et termes t, $\{\, x \mid A \,\}$:

$$\begin{array}{rlcl} & \mathcal{M}, v \models^{+} A[x := t] & \text{ssi} & \mathcal{M}, v \models^{+} t \in \{\, x \mid A \,\} \\ \text{et} & \mathcal{M}, v \models^{-} A[x := t] & \text{ssi} & \mathcal{M}, v \models^{-} t \in \{\, x \mid A \,\}. \end{array}$$

2.5 Les modèles de termes

Définitions

- Un *modèle de termes* $\mathcal{M}$ est un modèle glouton dont l'univers est l'ensemble des termes du langage et tel que $\mathcal{M}(t)(v) = t[\vec{x} := v(\vec{x})]$[12], pour tout terme t et suite $\vec{x}$ de *toutes* les variables (libres) de t.
- Quand on a affaire à un modèle de termes, la valuation id sera l'identité sur les variables. Il est clair que $\mathcal{M}(t)(id) = t$, que $\mathcal{M}, id \models^{+} t \in \{\, x \mid A \,\}$ ssi $\langle t, \{\, x \mid A \,\}\rangle$ appartient à $\mathcal{M}(\in)^{+}$ et que $\mathcal{M}, id \models^{-} t \in \{\, x \mid A \,\}$ ssi $\langle t, \{\, x \mid A \,\}\rangle$ appartient à $\mathcal{M}(\in)^{-}$.

---

[11] On peut également imposer des restrictions aux formules A utilisées pour former ce genre de termes, pourvu que l'ensemble des termes reste fermé pour la substitution.

[12] Si $\vec{x}$ est la suite $x_1 \ldots x_n$, $v(\vec{x})$ est la suite $v(x_1) \ldots v(x_n)$.

- Un modèle *abstrait*, $\mathcal{M}$, est un modèle de termes vérifiant :

$$\begin{aligned}&\text{si } \mathcal{M}, id \models^+ A[x := t], \text{ alors } \mathcal{M}, id \models^+ t \in \{\, x \mid A \,\},\\ &\text{si } \mathcal{M}, id \models^- A[x := t], \text{ alors } \mathcal{M}, id \models^- t \in \{\, x \mid A \,\},\end{aligned}$$

  pour tous termes t et $\{\, x \mid A \,\}$.

- Un modèle *minimal* est un modèle abstrait identique à toutes ses restrictions abstraites.

Théorème 1

Tout modèle minimal est compréhensif.

Démonstration. Soit un modèle minimal $\mathcal{M}$. On remarque d'abord que :

$\mathcal{M}, v \models^+ t \in \{\, x \mid A \,\}$ ssi $\mathcal{M}, id \models^+ t[\vec{x} := v(\vec{x})] \in \{\, x \mid A[\vec{x} := v(\vec{x})] \,\}$ et que $\mathcal{M}, v \models^+ A[x := t]$ ssi $\mathcal{M}, id \models^+ A[x := t][\vec{x} := v(\vec{x})]$, lorsque $\vec{x}$ est une suite de toutes les variables de $t \in \{\, x \mid A \,\}$. Ceci est également valable pour $\models^-$.

Il suffit donc d'établir, pour toute formule A et tout terme t, que :

$$\begin{aligned}&\text{si } \mathcal{M}, id \models^+ t \in \{\, x \mid A \,\}, \text{ alors } \mathcal{M}, id \models^+ A[x := t],\\ &\text{si } \mathcal{M}, id \models^- t \in \{\, x \mid A \,\}, \text{ alors } \mathcal{M}, id \models^- A[x := t].\end{aligned}$$

Supposons, par l'absurde, qu'il y a des termes s et $\{\, x \mid B \,\}$ tels que $\mathcal{M}, id \models^+ s \in \{\, x \mid B \,\}$ et $\mathcal{M}, id \not\models^+ B[x := s]$. On définit alors un modèle de termes $\mathcal{M}^*$ en posant $\mathcal{M}^*(R)^+ = \mathcal{M}(R)^+ \setminus \{\langle s, \{\, x \mid B \,\}\rangle\}$ et $\mathcal{M}^*(R)^- = \mathcal{M}(R)^-$.

$\mathcal{M}^*, id \models^- s \in \{\, x \mid B \,\}$, car $\mathcal{M}$ est abstrait. Donc, comme $\mathcal{M}$ est glouton, $\mathcal{M}^*$ l'est aussi et $\mathcal{M}^* \prec \mathcal{M}$.

En outre, si $\mathcal{M}^*, id \models^+ A[x := t]$ alors, par le théorème de persistance, $\mathcal{M}, id \models^+ A[x := t]$. Comme $\mathcal{M}$ est abstrait, $\mathcal{M}, id \models^+ t \in \{\, x \mid A \,\}$. Donc, $\mathcal{M}^*, id \models^+ t \in \{\, x \mid A \,\}$, car $A[x := t]$ ne peut être la formule $B[x := s]$.

Par ailleurs, si $\mathcal{M}^*, id \models^- A[x := t]$ alors, par le théorème de persistance, $\mathcal{M}, id \models^- A[x := t]$ et, $\mathcal{M}$ étant abstrait, $\mathcal{M}, id \models^- t \in \{\, x \mid A \,\}$ et aussi $\mathcal{M}^*, id \models^- t \in \{\, x \mid A \,\}$.

Tout ceci montre que $\mathcal{M}^*$ est abstrait et contredit l'hypothèse. On prouve de la même manière que si $\mathcal{M}, id \models^- t \in \{\, x \mid A \,\}$, alors $\mathcal{M}, id \models^- A[x := t]$. □

Remarque : dans un modèle minimal, les relations interprétant les symboles relationnels autres que $\in$ sont classiques.

Soit une chaîne (pour l'ordre partiel $\prec$) de modèles abstraits $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$. Alors le modèle de termes $\bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$ tel que

$$(\bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i)(R)^+ = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i(R)^+ \quad \text{et} \quad (\bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i)(R)^- = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i(R)^-,$$

pour tout symbole relationnel R, est une restriction abstraite de chacun des $\mathcal{M}_i$. On peut donc utiliser le lemme de Zorn pour obtenir, grâce au théorème 1, le :

Corollaire

Tout modèle abstrait a une restriction compréhensive.

Remarque : L'existence d'un modèle compréhensif peut aussi se prouver en utilisant l'analogue glouton de la construction de Gilmore ([3]) et de Kripke ([6]). Cette méthode revient à définir une opération qui transforme un modèle abstrait en une restriction abstraite, de sorte que tout point fixe pour cette opération soit un modèle compréhensif et qu'en itérant transfiniment l'opération on obtienne un premier point fixe, qui s'avère alors être un modèle compréhensif maximum.

3 La logique gloutonne

3.1 Le calcul des séquents

Nous montrerons que la théorie naïve des ensembles peut être formalisée en utilisant le calcul des séquents sans la règle de coupure (voir [2]).

Définition

Un *séquent* est une paire ordonnée d'ensembles finis de formules. On utilisera des lettres grecques majuscules (avec indices et/ou accents si nécessaire) pour désigner des ensembles finis de formules. Le séquent $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ se notera $\Gamma \Vdash \Delta$. De plus, l'ensemble $\Gamma \cup \Delta$ sera noté Γ, Δ et $\{A\}$ sera aussi noté A.

La formulation particulière des règles a peu d'importance pour les considérations qui suivent. Voici néanmoins un jeu de règles.

$$\frac{\Gamma \Vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Vdash \Delta}\ \neg_G \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \neg A, \Delta}\ \neg_D$$

$$\frac{\Gamma, A, B \Vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Vdash \Delta}\ \wedge_G \qquad \frac{\Gamma \Vdash A, \Delta \quad ; \quad \Gamma \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge_D$$

$$\frac{\Gamma, A \Vdash \Delta \quad ; \quad \Gamma, B \Vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \Vdash \Delta}\ \vee_G \qquad \frac{\Gamma \Vdash A, B, \Delta}{\Gamma \Vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_D$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A, \Delta \quad ; \quad \Gamma, B \Vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \Vdash \Delta}\ \to_G \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash A \to B, \Delta}\ \to_D$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A, B, \Delta \quad ; \quad \Gamma, A, B \Vdash \Delta}{\Gamma, A \leftrightarrow B \Vdash \Delta}\ \leftrightarrow_G \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash B, \Delta \quad ; \quad \Gamma, B \Vdash A, \Delta}{\Gamma \Vdash A \leftrightarrow B, \Delta}\ \leftrightarrow_D$$

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \Vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, A \Vdash \Delta}\ \forall_G \qquad \frac{\Gamma \Vdash A[x := y], \Delta}{\Gamma \Vdash \forall x\, A, \Delta}\ \forall_D$$

$$\frac{\Gamma, A[x := y] \Vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, A \Vdash \Delta}\ \exists_G \qquad \frac{\Gamma \Vdash A[x := t], \Delta}{\Gamma \Vdash \exists x\, A, \Delta}\ \exists_D$$

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \Vdash \Delta}{\Gamma, t \in \{\, x \mid A \,\} \Vdash \Delta}\ \in_G \qquad \frac{\Gamma \Vdash A[x := t], \Delta}{\Gamma \Vdash t \in \{\, x \mid A \,\}, \Delta}\ \in_D$$

Restrictions : dans les applications d'une des règles $\forall_D$ ou $\exists_G$, les formules de $\Gamma, \Delta, \forall x\, A$ ne peuvent pas contenir des occurrences (libres) de la variable propre y.

3.2 Complétude de la théorie naïve des ensembles

Définitions

- Un séquent est *dérivable* ssi il existe une dérivation, à partir de séquents initiaux (séquents $\Gamma \Vdash \Delta$ tels que $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$) en utilisant les règles, qui se termine par ce séquent.
- Un séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ est *valide* ssi pour tout modèle glouton compréhensif $\mathcal{M}$ et valuation v tel que $\mathcal{M}, v \not\models^- A$, pour toute formule A de Γ, il y a au moins une formule B de Δ telle que $\mathcal{M}, v \models^+ B$. En particulier, le séquent $\Vdash A$ est valide ssi A est valide dans tous les modèles compréhensifs. Le séquent $\Vdash$ n'est pas valide.

Théorème de complétude

Un séquent est dérivable ssi il est valide.

On vérifie sans peine que tout séquent dérivable est valide en notant que les séquents initiaux le sont et que les règles préservent la validité[13]. Nous allons donc nous attacher à montrer qu'un séquent non dérivable n'est pas valide.

Définition

Une *suite de Henkin* est une suite de séquents $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0, \Gamma_1 \Vdash \Delta_1, \ldots$ telle que

- aucun séquent de la suite n'est dérivable ;
- $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ et $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$;
- si A est une formule atomique et aucun $\Gamma_i \Vdash A, \Delta_i$ n'est dérivable alors A est dans un Δ_j ;

[13] La règle de coupure ne préserve pas la validité.

- si A est $\forall x\, B$ et aucun $\Gamma_i \Vdash A, \Delta_i$ n'est dérivable, alors il y a un terme t tel que $B[x := t]$ est dans un Δ_j ;
- si A est $\exists x\, B$ et aucun $\Gamma_i, A \Vdash \Delta_i$ n'est dérivable, alors il y a un terme t tel que $B[x := t]$ est dans un Γ_j.

Soit $\mathcal{G}$ une suite de Henkin. Nous définissons $\mathcal{G} \models^+ A$ comme signifiant que, pour au moins un i, $\Gamma_i \Vdash A, \Delta_i$ est dérivable ; et $\mathcal{G} \models^- A$ comme signifiant que, pour au moins un i, $\Gamma_i, A \Vdash \Delta_i$ est dérivable.

Nous en dérivons un modèle de termes $\mathcal{M}$ de la façon suivante. $\mathcal{M}(R)^+$ est l'ensemble des n-uples de termes $\vec{t}$, tels que $\mathcal{G} \models^+ R\vec{t}$ et $\mathcal{M}(R)^-$ est l'ensemble des $\vec{t}$ tels que $\mathcal{G} \models^- R\vec{t}$.

On voit que $\mathcal{M}$ est glouton, car si un n-uple de termes $\vec{t}$ n'est pas dans $\mathcal{M}(R)^+$, alors aucun $\Gamma_i \Vdash R\vec{t}, \Delta_i$ n'est dérivable. $R\vec{t}$ appartient donc à un Δ_j et $\Gamma_j, R\vec{t} \Vdash \Delta_j$ est un séquent initial. Par conséquent $\mathcal{G} \models^- R\vec{t}$.

L'atténuation : on montre, par induction sur la longueur des dérivations, en prenant soin de modifier si nécessaire les variables propres des règles $\forall_D$ et $\exists_G$, que si $\Gamma \Vdash \Delta$ est dérivable, alors $\Gamma, A \Vdash \Delta$ et $\Gamma \Vdash A, \Delta$ sont également dérivables, pour tout séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ et formule A. On notera que l'atténuation entraîne que $\mathcal{G} \not\models^- A$, si A est dans un Γ_i et que $\mathcal{G} \not\models^+ A$, si A est dans un Δ_i.

Lemme 1

Si $\mathcal{M}, id \models^+ A$ alors $\mathcal{G} \models^+ A$.
Si $\mathcal{M}, id \models^- A$ alors $\mathcal{G} \models^- A$.

La démonstration est une induction sur la complexité de A, définie comme étant le nombre d'occurrences, dans A, des connecteurs logiques ($\exists$, $\forall$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ et $\neg$) qui n'apparaissent pas dans un terme. De sorte que la complexité de $A[x := t]$ est toujours strictement inférieure à celle $\forall x\, A$ et de $\exists x\, A$. Nous décrivons seulement quelques cas significatifs.

Si $\mathcal{M}, id \models^+ B \rightarrow C$, alors $\mathcal{M}, id \models^- B$ et/ou $\mathcal{M}, id \models^+ C$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{G} \models^- B$ et/ou $\mathcal{G} \models^+ C$. Par atténuation, il y a dans les deux cas un i tel que $\Gamma_i, B \Vdash C, \Delta_i$ est dérivable. En appliquant alors la règle d'introduction de l'implication à droite, on a que $\Gamma_i \Vdash B \rightarrow C, \Delta_i$ est dérivable et donc que $\mathcal{G} \models^+ B \rightarrow C$.

Si $\mathcal{M}, id \models^- B \to C$, alors $\mathcal{M}, id \models^+ B$ et $\mathcal{M}, id \models^- C$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{G} \models^+ B$ et $\mathcal{G} \models^- C$. Donc, il y a un i et un j tels que $\Gamma_i \Vdash B, \Delta_i$ et $\Gamma_j, C \Vdash \Delta_j$ sont dérivables. Par atténuation et la règle de l'implication à gauche, $\Gamma_k, B \to C \Vdash \Delta_k$ est dérivable, où k est le maximum de i et j. Donc $\mathcal{G} \models^- B \to C$.

Si $\mathcal{M}, id \models^+ \exists x\, B$, alors il y a un terme t tel que $\mathcal{M}, id[x \rightsquigarrow t] \models^+ B$; donc $\mathcal{M}, id \models^+ B[x := t]$, car $\mathcal{M}(t)(id) = t$. Par hypothèse d'induction, $\Gamma_i \Vdash B[x := t], \Delta_i$ est dérivable, pour un i. La règle $\exists_D$ donne la dérivabilité de $\Gamma_i \Vdash \exists x\, B, \Delta_i$. Donc $\mathcal{G} \models^+ \exists x\, B$.

Si $\mathcal{M}, id \models^- \exists x B$, raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathcal{G} \not\models^- \exists x B$. Il y a donc un terme t tel que $B[x := t]$ est dans un Γ_j. Dès lors $\mathcal{G} \not\models^- B[x := t]$ et l'hypothèse d'induction nous permet de conclure que $\mathcal{M}, id \not\models^- B[x := t]$. On a donc bien $\mathcal{M}, id \not\models^- \exists x\, B$. □

Lemme 2

> *Un séquent d'une suite de Henkin n'est pas valide.*

Démonstration. Soit une suite de Henkin $\mathcal{G} : \Gamma_0 \Vdash \Delta_0, \ldots$. On sait que $\mathcal{G} \not\models^- A$, si A est dans un Γ_i et $\mathcal{G} \not\models^+ A$, si A est dans un Δ_i. Dans le modèle, $\mathcal{M}$, obtenu à partir de cette suite, on a donc, par le lemme 1, $\mathcal{M}, id \not\models^- A$, si A est dans un Γ_i et $\mathcal{M}, id \not\models^+ A$, si A est dans un Δ_i. Par le théorème de persistance, il en va de même pour toute restriction gloutonne de ce modèle.

Si $\mathcal{M}, id \models^+ A[x := t]$, alors $\mathcal{G} \models^+ t \in \{ x \mid A \}$, par le lemme 1 et la règle $\in_D$. Donc, $\mathcal{M}, id \models^+ t \in \{ x \mid A \}$. De même, en utilisant la règle $\in_G$, on a que si $\mathcal{M}, id \models^- A[x := t]$, alors $\mathcal{M}, id \models^- t \in \{ x \mid A \}$. $\mathcal{M}$ est, par conséquent, abstrait et possède une restriction compréhensive (corollaire au théorème 1). Les séquents de $\mathcal{G}$ ne sont donc pas valides. □

Pour achever la démonstration du théorème de complétude il suffit donc de montrer le :

Lemme 3

> *Si le séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ n'est pas dérivable, il y a une suite $\mathcal{G}$ de Henkin comprenant ce séquent.*

Démonstration. Soit $A_0, A_1, \ldots$ une énumeration de toutes les formules du langage. Nous commençons la suite par $\Gamma \Vdash \Delta$, et nous décrivons le passage de $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ à $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$.

Supposons que A_i est atomique. Si $\Gamma_i \Vdash A_i, \Delta_i$ n'est pas dérivable, nous ajoutons A_i à droite, c'est-à-dire nous posons Γ_{i+1} comme étant Γ_i et Δ_{i+1} comme étant A_i, Δ_i.

Supposons que A_i est $\forall x\, B$. Soit y une variable non libre dans une formule du séquent $\Gamma_i \Vdash \forall x\, B, \Delta_i$. Nous posons $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ comme étant $\Gamma_i \Vdash B[x := y], \Delta_i$, si $\Gamma_i \Vdash \forall x\, B, \Delta_i$ n'est pas dérivable. La non-dérivablité de $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ résulte ici du choix de y et de la règle $\forall_D$.

Le cas où A_i est $\exists x\, B$ est symétrique.

Dans tous les autres cas, $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ est $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$. □

La démonstration que nous venons de faire peut être utilisée pour donner une preuve sémantique de l'élimination des coupures du calcul des prédicats ou de certains sous-systèmes de la théorie naïve des ensembles. Les preuves sémantiques existantes utilisent toujours une notion analogue à celle de modèle partiel ([4]).

3.3 Remarques conclusives

Si r est le terme $\{\, x \mid \neg x \in x \,\}$, la dérivation du paradoxe de Russell a l'allure suivante :

$$\dfrac{\dfrac{r \in r \Vdash r \in r}{\Vdash \neg r \in r, r \in r}\,\neg_D}{\Vdash r \in r}\,\in_D \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{r \in r \Vdash r \in r}{r \in r, \neg r \in r \Vdash}\,\neg_G}{r \in r \Vdash}\,\in_G$$

De là on tire que des séquents comme

$$\begin{aligned} r \in r \leftrightarrow r \in r &\Vdash, \\ \forall z\, (r \in z \leftrightarrow r \in z) &\Vdash, \\ \text{et} \quad \forall x\, \forall z\, (x \in z \leftrightarrow x \in z) &\Vdash \end{aligned}$$

sont dérivables et donc valides dans tout modèle compréhensif.

Appelons *Ext* l'énoncé

$$\forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow \forall z (x \in z \leftrightarrow y \in z)).$$

Cet énoncé exprime l'axiome d'extensionalité, quand le langage ne contient pas d'autre symbole relationnel que $\in$, ni d'autres termes que les variables et ceux de la forme $\{\, x \mid A \,\}$. $\Vdash \neg Ext$ est dérivable et donc, $\neg Ext$ est valide dans tout modèle compréhensif. Ceci ne signifie nullement qu'on ne peut pas forger un concept pertinent de modèle compréhensif extensionnel. On a d'ailleurs une situation semblable avec le schéma de compréhension. Les séquents $\Vdash \neg\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in x)$ et $\Vdash \neg\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \neg x \in x)$ sont dérivables et donc certains axiomes de compréhension sont faux dans tous les modèles compréhensifs. On voit qu'on *frôle* l'inconsistance.

D'un autre côté, le théorème de complétude fournit une méthode pour construire des modèles compréhensifs non triviaux[14]. Par exemple, il est facile de voir qu'on ne peut dériver (sans coupure) ni le séquent

$$\Vdash \{\, x \mid x \in x \,\} \in \{\, x \mid x \in x \,\},$$

ni le séquent

$$\{\, x \mid x \in x \,\} \in \{\, x \mid x \in x \,\} \Vdash .$$

On peut obtenir ainsi des modèles compréhensifs dans lesquels $\{\, x \mid x \in x \,\} \in \{\, x \mid x \in x \,\}$ *n'est pas vrai* et des modèles compréhensifs dans lesquels $\{\, x \mid x \in x \,\} \in \{\, x \mid x \in x \,\}$ n'est pas faux. Il en va de même des séquents $\Vdash \forall x\, \exists y\, \neg y \in x$ et $\Vdash Ext$.

Références

[1] Marcel Crabbé. Prelogic of logoi. *Studia logica*, 35 :219–226, 1976.

[2] Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39 :176–210, 405–431, 1935. Traduction française par Robert Feys et Jean Ladrière : *Recherches sur la déduction logique*, Presses Universitaires de France, 1955 ; traduction anglaise par M. E. Szabo : Investigations into logical deduction, dans *The collected papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, 1969.

[3] P. C. Gilmore. The consistency of partial set theory without extensionality. In *Axiomatic set theory II, Proceedings of symposia in pure mathematics, XIII*, pages 147–153. American mathematical society, 1974.

[4] Jean-Yves Girard. *Proof theory et logical complexity I.* Bibliopolis, 1987.

[14] Par modèle trivial, nous entendons un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}(R)^+ = \mathcal{M}(R)^- = |\mathcal{M}|^n$, pour tout symbole relationnel d'arité n. Dans un modèle trivial toute formule est valide.

[5] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie,* I, 2, C.

[6] Saul Kripke. Outline of a theory of truth. *The journal of philosophy,* 72 :690–716, 1975.

[7] Graham Priest. *In contradiction. A study of the transconsistent.* Martinus Nijhoff, 1987.

Département de Philosophie
Université catholique de Louvain
Place Mercier, 14
1348 Louvain-la-Neuve
Belgique