NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Les théorèmes 3-stratifiés de* NF_3.

Note (*) de MM. **Maurice Boffa** et **Marcel Crabbé**, présentée par M. Jean Leray.

NF_3 est le fragment de NF (la théorie des ensembles de Quine) engendré par les axiomes propres de NF qu'on peut 3-stratifier (c'est-à-dire stratifier avec les types 0, 1, 2). Nous caractérisons les théorèmes 3-stratifiés de NF_3 (et de NF_3 + axiome de l'infini) en termes de théorie des types.

Soit k un entier $\geqq 2$. On notera TT_k la théorie simple des types réduite aux k premiers types $0, 1, \ldots, k-1$. Les formules de TT_k seront dites k-stratifiées et NF_k désignera le fragment de NF engendré par les axiomes propres de NF qu'on peut k-stratifier. TT_k^∞ (resp. TT_k^+) désignera l'extension de TT_k obtenue en ajoutant pour chaque entier $n \geqq 1$ l'axiome affirmant qu'il existe au moins n objets distincts de type 0 (resp. en ajoutant chaque énoncé k-stratifié de la forme $A \leftrightarrow A^+$, où A^+ est obtenu à partir de A en augmentant chaque type d'une unité). Grichine [(1), (2), (3)] a prouvé que la consistance de NF_3 est démontrable dans l'arithmétique et que $NF = NF_4$.

PROPOSITION. — *Les théorèmes 3-stratifiés de* NF_3 *coïncident avec les théorèmes de* TT_3^∞.

Démonstration. — En utilisant (4), il apparaît que les théorèmes 3-stratifiés de NF_3 coïncident avec les théorèmes de TT_3^+. Il reste à montrer que $TT_3^+ = TT_3^\infty$, ce qui revient à prouver que tout modèle infini M de TT_3 satisfait $A \leftrightarrow A^+$ pour chaque énoncé A 2-stratifié. Soit B l'énoncé du langage des algèbres de Boole obtenu en remplaçant dans A chaque formule atomique de la forme $x_0 \in x_1$ par $x_0 \leqq x_1$ et en restreignant aux atomes chaque quantificateur portant sur une variable de type 0. Notons M_i ($i = 1, 2$) l'algèbre de Boole des ensembles de M de type i. Il est clair que $M \models A \leftrightarrow M_1 \models B$ et $M \models A^+ \leftrightarrow M_2 \models B$. M étant infini, M_1 et M_2 sont deux algèbres de Boole atomiques infinies; elles sont donc élémentairement équivalentes [*voir* 5.5 dans (5)], ce qui implique que M satisfait $A \leftrightarrow A^+$.

Remarque. — En s'inspirant de (6) et de l'élimination des quantificateurs pour les anneaux de Boole séparables [*voir* (7), p. 62], on peut trouver un procédé effectif pour transformer une démonstration d'un théorème 3-stratifié de NF_3 en une démonstration dans TT_3^∞. Il en résulte que la Proposition précédente est démontrable dans l'arithmétique.

COROLLAIRES. — (i) *Chaque théorème 3-stratifié de* NF_3 *est satisfait dans presque tous les modèles finis de* TT_3.

(ii) *Tout énoncé 3-stratifié qui est satisfait dans une infinité de modèles finis de* TT_3 *est consistant avec* NF_3.

(iii) *L'ensemble des énoncés 3-stratifiés qui sont satisfaits dans presque tous les modèles finis de* TT_3 *est consistant avec* NF_3.

(iv) *Il n'existe pas d'extension finie de* TT_3 *dont les théorèmes coïncident avec les théorèmes 3-stratifiés de* NF_3.

(v) *Si* AI *désigne une version* 3-*stratifiée de l'axiome de l'infini* [*par exemple, l'axiome* C 1 *dans* ([8])], *alors les théorèmes* 3-*stratifiés de* NF_3+AI *coïncident avec les théorèmes de* TT_3+AI.

Remarque. — Pour chaque énoncé 2-stratifié A, notons B l'énoncé du langage des algèbres de Boole obtenu à partir de A comme dans la démonstration décrite plus haut. On voit facilement que A est un théorème de NF_2 si et seulement si B est un théorème de la théorie des algèbres de Boole atomiques infinies. Ce résultat reste vrai si on y remplace NF_2 par la théorie T ayant les axiomes suivants : l'axiome d'extensionalité, l'axiome du singleton, l'axiome de la réunion de deux ensembles et l'axiome du complément d'un ensemble. Il en résulte que $NF_2 = T$. Les modèles de NF_2 coïncident donc avec les structures $\langle M, \varepsilon \rangle$, où M est une algèbre de Boole atomique équipotente à l'ensemble de ses atomes et où $x \varepsilon y \leftrightarrow i(x) \leqq y$, i désignant une bijection quelconque de M sur l'ensemble de ses atomes.

(*) Séance du 21 mai 1975.

(1) GRICHINE, *Soviet. Math. Doklady*, 10, 1969, p. 1387-1390.

(2) GRICHINE, *Recherches en linguistique mathématique, logique mathématique et langages informatiques*, Moscou, 5, 1972, p. 200-212 (en russe).

(3) GRICHINE, *Nauchno-Tekhnicheskaya Informatsiya*, série 2, n° 1, 1972, p. 22-24 (en russe).

(4) SPECKER, Typical ambiguity, *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Proc. 1960 intern. congr.), Stanford, 1962, p. 116-124.

(5) CHANG et KEISLER, *Model Theory*, North-Holland, 1973.

(6) CRABBÉ, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 1.

(7) KREISEL et KRIVINE, *Éléments de logique mathématique*, Dunod, Paris, 1967.

(8) GÖDEL, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton, 1940.

M. B. :
49, *rue Dupré*,
1090 *Bruxelles*,
Belgique;

M. C. :
Naamsesteenweg, 403,
3030 *Heverlee*,
Belgique.