Le schéma d'ambiguïté en théorie des types

Marcel Crabbé
Université Catholique de Louvain
Reçu le 19 juin 1985

La théorie ambiguë des types (TT^*) résulte de l'addition à la théorie des types (TT) des axiomes d'ambiguïté. Lorsque φ est un énoncé de TT, on obtient un nouvel énoncé φ^+ en haussant tous les types dans φ d'une unité. Les axiomes d'ambiguïté sont les énoncés de la forme $\varphi \leftrightarrow \varphi^+$ (voir [9]). Ces axiomes expriment que tout énoncé, vrai à un niveau, est également vrai aux autres. Après avoir montré que TTU^* n'est pas une extension finie de TTU (théories des types avec "urléléments"), Boffa [2] demande s'il en va de même pour TT (la réponse est positive lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini de types - voir [6]). Cette question ainsi que ses prolongements feront l'objet de cet article. Dans le premier paragraphe nous fixerons la terminologie, les notations, les définitions et les propriétés de base. Ensuite, dans le second paragraphe, nous montrerons que TT^* ne peut pas s'obtenir en ajoutant à TT un ensemble d'énoncés cohérent de la forme : $\{\varphi, \varphi^+, \varphi^{++}, \ldots\}$. Ceci répond à la question de Boffa - à supposer que TT^* soit cohérente. Dans le troisième paragraphe, nous étendrons ce résultat en montrant que l'on peut remplacer φ par un ensemble récursif d'énoncés qui ne contient qu'un nombre fini de types. Enfin, en appendice, nous examinerons la théorie TNP, située entre TT et TT^*, et nous démontrerons que ces résultats négatifs sont également valables en ce qui concerne les relations entre TNP et TT^*.

1. Préliminaires

TT est la théorie des types engendrée par les axiomes d'extensionalité et de compréhension, et dont les types sont les nombres naturels. $|x|$ est le cardinal de x, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles équipotents à x (si x est de type i, $|x|$ est de type $i+1$). Les lettres α, β, γ désignent des cardinaux. $\wp(x)$ est l'ensemble des parties de x, $USC(x)$ est l'ensemble des singletons d'éléments de x : $\{\{y\} | y \in x\}$. $T|x|$ est le cardinal de $USC(x)$.

$$T^{-1}T\alpha \text{ est } \alpha \,,\; T^{-1}x = \emptyset \,,$$

si x n'est pas un cardinal de la forme $T\alpha$.

$$2^{|x|} = T^{-1}|\wp(x)| \text{ et } 2^x = \emptyset \ ,$$

si x n'est pas un cardinal. Dans TT, on démontre :

$$2^{|USC(x)|} = |\wp(x)|,\ 2^\alpha \neq \emptyset \longrightarrow T2^\alpha = 2^{T\alpha} \ ,$$

$$2^{T\alpha} = T\beta \longrightarrow 2^\alpha = \beta,\ 2^\alpha \neq \emptyset \longrightarrow \alpha < 2^\alpha$$

(voir [3] et [4]). V est l'ensemble des entités de type 0 : $\{x^0 | x^0 = x^0\}$. ν est le cardinal de V. Si E est une expression (variable, terme ou formule), E^+ est l'expression résultant de l'addition de 1 à tous les indices de type de E. Si Σ est un ensemble de formules, Σ^+ est l'ensemble des formules φ^+, tel que φ est dans Σ. E^{+k} est l'expression $E^{+\cdots+}$, l'opération $+$ étant itérée k fois. Un énoncé est une formule sans variable libre.

Modèles naturels de TT

Si φ est un énoncé du langage de TT et si x^k est un variable de type $k (k > 0)$, ne figurant pas dans φ, x^k vér φ est la formule obtenue en remplaçant, dans φ^{+k-1}, les quantificateurs Qy^{i+k-1}, par $Qy^{i+k-1} \in \wp^i(x^k)$. (voir [1], pour cette définition). La formule x vér φ signifie donc -si x est non vide- que le modèle naturel de TT construit au dessus de x en itérant l'opération $\wp$, à savoir $< x, \wp(x), \wp\wp(x), \ldots, \wp^i(x), \ldots >$, vérifie φ. Notons que (x vér $\varphi)^+$ est la formule x^+ vér φ, et non x^+ vér φ^+.

Proposition 0.

Quel que soit l'énoncé φ :

1. $TT \vdash \varphi \longleftrightarrow V$ vér φ ,
2. $TT \vdash |x| = |y| \longrightarrow (x$ vér $\varphi \leftrightarrow y$ vér $\varphi)$,
3. $TT \vdash x$ vér $\varphi \longleftrightarrow USC(x)$ vér φ ,
4. $TT \vdash \varphi$ si et seulement si $TT \vdash \forall x(x \neq \emptyset \rightarrow x$ vér $\varphi)$,
5. $TT \vdash x$ vér $\varphi^+ \longleftrightarrow \wp(x)$ vér φ ,
6. $TT \vdash \alpha > 0 \longrightarrow ((\forall x \in \alpha)(x$ vér $\varphi) \leftrightarrow (\exists x \in \alpha)(x$ vér $\varphi))$.

Démonstration.

Nous nous limiterons aux indications essentielles.

1. $V^{+i+1} = \wp(V^{+i})$ et $(\forall x^i \in V^{+i})\ \varphi(x^i) \longleftrightarrow \forall x^i \varphi(x^i)$.
2. Soit f, une bijection entre x et y et soit n, le type maximum figurant dans φ. On définit une suite de $n+1$ bijections en posant : $f_0 = f, f_{k+1}(z) = \{f_k(v) | v \in z\}$ $(k < n)$. La suite $< f_0, \ldots, f_n >$ est un ϵ-isomorphisme entre les structures $< x, \ldots, \wp^n(x) >$ et $< y, \ldots, \wp^n(y) >$.
3. La démonstration est analogue. Partant de la formule $v \in x \wedge \{v\} = w$, exprimant une relation fonctionelle injective, on définit une suite de $n+1$ formules, exprimant un ϵ-isomorphisme des structures $< x, \ldots, \wp^n(x) >$ et $< USC(x), \ldots, \wp^n(USC(x)) >$.
4. Si $TT \vdash \forall x(x \neq \emptyset \longrightarrow x$ vér $\varphi)$, alors $TT \vdash V \neq \emptyset \rightarrow V$ vér φ. On conclut par le premier point. La réciproque s'établit par induction sur la longueur d'une démonstration de φ dans TT.
5. Découle immédiatement de la définition de x vér φ, et 6. est une conséquence de 2. ■

Soit φ, un énoncé de TT et x^k, une variable $(k > 1)$. $x^k \models \varphi$ est la formule $(\forall y^{k-1} \in x^k)(y^{k-1}$ vér $\varphi)$. Cette définition est motivée par le fait que la valeur de vérité de φ dans le modèle naturel construit au dessus d'un ensemble, ne dépend que de la cardinalité de cet ensemble (proposition 0, 2 et 6). Partant, si α est un cardinal d'ensembles non vides, $\alpha \models \varphi$ signifie que le modèle naturel construit au dessus d'un ensemble de cardinal α vérifie φ. De la proposition 0, on déduit la

Proposition 1.

1. $TT \vdash \varphi \leftrightarrow \nu \models \varphi$,
2. $TT \vdash \alpha \models \varphi \leftrightarrow T\alpha \models \varphi$,
3. $TT \vdash \varphi$ ssi $TT \vdash (\forall \alpha > 0)(\alpha \models \varphi)$,
4. $TT \vdash 2^\alpha \neq \emptyset \longrightarrow (\alpha \models \varphi^+ \leftrightarrow 2^\alpha \models \varphi)$,
5. $TT \vdash \alpha \models \neg\varphi \leftrightarrow \neg\alpha \models \varphi$,
6. $TT \vdash (\alpha \models \varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\alpha \models \varphi \vee \alpha \models \psi)$.

2.

Nous commencerons par donner une formulation nouvelle de TT^*. Pour cela, nous définissons $\diamond\varphi$ comme étant l'énoncé $(\exists\alpha > 0)(2^\alpha = \nu \wedge \alpha \models \varphi)$.

Lemme.

1. $TT \vdash \varphi \rightarrow (\diamond\varphi)^+$,
2. $TT \vdash \diamond\varphi^+ \rightarrow \varphi$.

Démonstration.

1. En utilisant la proposition 1, on démontre successivement, dans TT :

$$\varphi \rightarrow \nu \models \varphi, \varphi \rightarrow T\nu \models \varphi, \nu > 0 \wedge 2^{T\nu} = \nu^+$$

$$\text{et } \varphi \rightarrow (\exists\alpha > 0)(2^\alpha = \nu^+ \wedge \alpha \models \varphi)\ .$$

2. $\diamond\varphi^+$ est l'énoncé $(\exists\alpha > 0)(2^\alpha = \nu \wedge \alpha \models \varphi^+)$. Par la proposition 1, cet énoncé équivaut, dans TT, à $(\exists\alpha > 0)(2^\alpha = \nu \wedge 2^\alpha \models \varphi)$, qui implique à son tour $\nu \models \varphi$ et φ.

Théorème 1.

Appelons $TT^\diamond$, la théorie résultant de l'addition à TT des axiomes $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$, pour chaque énoncé φ. Alors $TT^\diamond = TT^*$.

Démonstration.

1. $TT^\diamond \subseteq TT^*$. En effet, quel soit l'énoncé φ, dans TT^* on démontre : $(\diamond\varphi)^+ \rightarrow \diamond\varphi$, $\varphi \rightarrow (\diamond\varphi)^+$ (lemme) et donc $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$.
2. $TT^* \subseteq TT^\diamond$. Dans $TT^\diamond$, on démontre : $\varphi^+ \rightarrow \diamond\varphi^+$, $\diamond\varphi^+ \rightarrow \varphi$ (lemme) et donc $\varphi^+ \rightarrow \varphi$. On y prouve également $\neg\varphi^+ \rightarrow \neg\varphi$ et donc $\varphi \leftrightarrow \varphi^+$, pour tout énoncé φ. ∎

La démonstration du théorème 2 sera basée sur une propriété classique des cardinaux, démontrable sans utiliser l'axiome du choix. Nous indiquons ici les précautions à prendre pour transférer ce résultat en théorie des types. Des démonstrations similaires -dans le cadre de NF et avec une autre définition de 2^α- peuvent être trouvées dans [5] et [7].

Rappelons qu'un aleph est un cardinal d'un ensemble bien ordonnable et que le nombre de Hartogs d'un cardinal α est le plus petit aleph $\not\leq \alpha$, s'il en existe, et l'ensemble vide, sinon. Le nombre de Hartogs de α est noté $\aleph(\alpha)$.

Proposition 2. (Sierpiński [8])

1. $TT \vdash 2^{2^{2^\alpha}} \neq \emptyset \rightarrow \aleph(\alpha) < 2^{2^{2^\alpha}}$.
2. $TT \vdash (\forall x \subseteq NC)(x \neq \emptyset \rightarrow (\exists \alpha \in x)(\forall \beta \in x)\ 2^\beta \neq \alpha)$. ($NC$ est l'ensemble des cardinaux).

Démonstration.

1. Soit x, un ensemble de cardinal α. Chaque bon ordre R sur x, peut être codé par une famille de parties de x -les segments initiaux. L'ordinal de R est codé par l'ensemble des bons ordres sur x, isomorphes à R. Dès lors, l'ensemble des ordinaux correspondant aux bons ordres sur x peut être identifié à un ensemble $On(x) \subseteq \wp\wp\wp(x)$. Si $2^{2^{2^\alpha}} \neq \emptyset$, $T^{-1}T^{-1}T^{-1}|On(x)| \leq 2^{2^{2^\alpha}}$. La démonstration classique montre alors que $T^{-1}T^{-1}T^{-1}|On(x)| = \aleph(\alpha)$.
2. Il s'agit de montrer que tout ensemble non vide de cardinaux possède un élément minimal pour la relation $\beta \prec \alpha$, définie par $2^\beta = \alpha$. Raisonnons par l'absurde. Si x n'a pas d'élément minimal, alors par le premier point, l'ensemble $X = \{\aleph(\gamma) | \gamma \in x \wedge \aleph(\gamma) \neq \emptyset\}$ est non vide. Considérons un cardinal α dans x, tel que $\aleph(\alpha)$ soit le plus petit élément de X. Par hypothèse, il y a un cardinal β dans x tel que $2^{2^{2^\beta}} = \alpha$. Donc, par le premier point, $\aleph(\beta) < \aleph(\alpha)$, ce qui contredit le choix de $\aleph(\alpha)$. ∎

Le lemme qui suit est une application de la proposition précédente. La méthode de démonstration utilisée remonte à Pétry [7].

Lemme.

$$TT \vdash (\exists \alpha > 0)(\alpha \models \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i}) \rightarrow (\exists \alpha > 0)(\alpha \models (\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i} \wedge \neg \diamond \varphi)) .$$

Démonstration.

L'hypothèse dit que l'ensemble

$$x = \{\alpha | \alpha > 0 \wedge \alpha \models \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i}\}$$

est non vide. Soit α_0, un élément minimal de x (minimal pour la relation $\beta \prec \alpha$, définie par $2^\beta = \alpha$). Il suffit de montrer que $\alpha_0 \models \neg\diamond\varphi$. Supposons, par absurde, que $\alpha_0 \models \diamond\varphi$. Il y a donc un cardinal $\beta > 0$, tel que $2^\beta = \alpha_0$ et $\beta \models \varphi$.

$$\beta \models (\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i})^+ ,$$

par la proposition 1. Il s'ensuit que

$$\beta \models \varphi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi^{+i}$$

et donc que $\beta \in x$, contredisant la minimalité de α_0. ∎

Si φ est un énoncé, $\underline{\varphi}$ désignera le schéma, ou l'ensemble d'énoncés : $\{\varphi, \varphi^+, \ldots\}$

Théorème 2.

Il n'existe pas d'énoncé φ de TT, tel que $TT + \underline{\varphi}$ soit cohérente et $TT + \underline{\varphi} \vdash TT^*$. En particulier, si TT^* est cohérente, le schéma d'ambiguïté n'est pas finitisable.

Démonstration.

Si $TT + \underline{\varphi} \vdash TT^*$, il y aura un naturel n tel que

$$TT + \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i} \vdash \varphi \rightarrow \diamond\varphi \quad \text{(théorème 1)}$$

et, donc,

$$TT \vdash \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i} \rightarrow \diamond\varphi$$

et

$$TT \vdash (\forall\alpha > 0)(\alpha \models (\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i} \rightarrow \diamond\varphi)) ,$$

par la proposition 1. Le lemme précédent permet de conclure que

$$TT \vdash (\forall\alpha > 0)(\alpha \models \neg \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i})$$

et, finalement, que

$$TT \vdash \neg \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi^{+i} .$$

C'est dire que $TT + \underline{\varphi}$ est incohérente. ∎

Remarque.

On voit, par ce qui précède, que $TT \vdash \varphi \rightarrow \diamond\varphi$ si et seulement si $TT \vdash \neg\varphi$. Par ailleurs, il y a des énoncés indécidables dans TT tels que $TT \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{+}$.

3.

Nous généraliserons ici le théorème 2 en utilisant des techniques liées à la démonstration du théorème de Gödel. AI est l'axiome de l'infini pour TT. Cet axiome exprime dans le langage de TT que l'ensemble des objets de type 0 n'est pas fini. Dans $TT + AI$, on interprète naturellement l'arithmétique d'ordre supérieur. Notons que l'axiome d'ambiguïté $AI \longleftrightarrow AI^{+}$ est prouvable dans TT et rappelons que $TT^{*} \vdash AI$.

A tout naturel n correspond un "numéral", noté $\overline{n}$, qui n'est autre que l'expression $\{x^1 | x^1$ a exactement n éléments$\}$: $\overline{0} = \{x | x = \emptyset\}$ et

$$\overline{n+1} = \{x^1 | \exists x_0^0 \ldots \exists x_n^0 \, (\bigwedge_{i=0}^{n} x_i^0 \in x^1 \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i^0 \neq x_j^0 \wedge (\forall x_{n+1}^0 \in x^1) \bigvee_{i=0}^{n} x_i^0 = x_{n+1}^0)\} .$$

(Formellement, les numéraux sont des expressions métalinguistiques employées comme abréviations contextuelles.)

Pour la démonstration du lemme qui suit, j'ai pu bénéficier de l'aide de D. Misercque.

Lemme.

Soit une formule $\varphi(x^2)$, à une seule variable libre (de type 2) et soit également une théorie T, extension récursive cohérente de $TT + AI$, telle que $T \vdash \varphi(\overline{n})$, pour tout naturel n. Il existe un énoncé ψ, cohérent avec T, tel que $TT + AI + \psi \vdash \varphi(\overline{n})$, pour tout naturel n.

Démonstration.

Il y a une formule à deux variables libres, $Dem(v^2, w^2)$, représentant, dans $TT+AI$, la relation de prouvabilité de la théorie T. En d'autre termes, pour chaque énoncé φ, on a :

(*) si $T \vdash \varphi$, alors il y a un naturel n tel que $TT + AI \vdash Dem(\overline{n}, "\varphi")$, et si $T \nvdash \varphi$, alors $TT + AI \vdash \neg Dem(\overline{n}, "\varphi")$, pour tout naturel n. ("φ" est le numéral associé au nombre de Gödel de φ).

Il y a également un énoncé σ tel que :

(**) $TT + AI \vdash \neg\sigma \leftrightarrow \exists n(Dem(n, "\sigma") \wedge (\forall k < n)\ \varphi(k))$.

Cela résulte du théorème du point fixe.

Nous montrons maintenant que $\neg\sigma$ est l'énoncé ψ cherché.

1. $T+\neg\sigma$ est cohérente. Sinon, $T \vdash \sigma$ et, par (*), il existe un naturel n tel que $TT + AI \vdash Dem(\overline{n}, "\sigma")$. Par ailleurs, $T \vdash (\forall k < \overline{n})\ \varphi(k)$. Donc, la théorie T démontre $\neg\sigma$ et est dès lors incohérente, contrairement à l'hypothèse du lemme.
2. $TT+AI+\neg\sigma \vdash \varphi(\overline{n})$, pour tout naturel n. Fixons un naturel arbitraire : m. $T + \neg\sigma$ étant cohérente, $TT + AI \vdash \neg Dem(\overline{k}, "\sigma")$, pour tout naturel k, par (*). Donc,

$$TT + AI + \neg\sigma \vdash (\exists n > \overline{m})(Dem(n, "\sigma") \wedge (\forall k < n)\ \varphi(k))\ .$$

Dès lors, $TT + AI + \neg\sigma \vdash \varphi(\overline{m})$. ∎

Si Σ est un ensemble d'énoncés, $\underline{\Sigma}$ désigne le schéma $\Sigma \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^{++} \cup \ldots$. L_k désignera l'ensemble des énoncés ayant tous leurs types $< k$.

Théorème 2 (bis).

Il n'existe pas d'ensemble récursif d'énoncés de L_k, Σ tel que la théorie $TT + \underline{\Sigma}$ soit cohérente et contienne TT^*.

Démonstration.

Supposons, par absurde, que Σ contredise le théorème. Il existe une formule $S(x^2)$ telle que

$$TT + AI \vdash S("\varphi")\ ,$$

si φ est dans Σ, et

$$TT + AI \vdash \neg S(\overline{n})\ ,$$

si n n'est pas le nombre de Gödel d'un énoncé de Σ. De la même manière qu'il est possible, dans l'arithmétique du second ordre, de définir une notion

de vérité pour les énoncés du premier ordre, on peut construire une formule $Ver(x^2)$, telle que :

$$TT + AI \vdash Ver(\text{"}\varphi\text{"}) \leftrightarrow \varphi \ ,$$

pour tout énoncé φ de L_k (on peut s'inspirer de [11]). Afin de pouvoir utiliser le lemme, montrons que $TT + \underline{\Sigma}$ est une extension récursive et cohérente de $TT + AI$ démontrant $S(\overline{n}) \longrightarrow Ver(\overline{n})$, pour tout naturel n. Tout d'abord, $\underline{\Sigma}$ est récursif, si Σ l'est. En second lieu,

$$TT + \underline{\Sigma} \vdash AI \ , \text{ car } TT^* \vdash AI \text{ et } TT + \underline{\Sigma} \vdash TT^* \ .$$

Enfin, si n est le nombre de Gödel d'un énoncé de Σ, alors $TT + \underline{\Sigma}$ démontre $Ver(\overline{n})$ et donc aussi $S(\overline{n}) \longrightarrow Ver(\overline{n})$; si n n'est pas le nombre de Gödel d'un énoncé de Σ, alors $TT + AI$ démontre $\neg S(\overline{n})$ et donc aussi $S(\overline{n}) \longrightarrow Ver(\overline{n})$. Appliquant le lemme, on obtient un énoncé ψ cohérent avec $TT + \underline{\Sigma}$, tel que dans $TT + AI + \psi$ on démontre $S(\overline{n}) \longrightarrow Ver(\overline{n})$, pour tout n. Donc, si φ est dans Σ, on déduit (dans $TT + AI + \psi$) $S(\text{"}\varphi\text{"})$, $Ver(\text{"}\varphi\text{"})$ et φ. Dès lors,

$$TT + AI + \underline{\psi} \vdash \underline{\Sigma} \ .$$

Il ne reste qu'à s'assurer de la cohérence de $TT + AI + \underline{\psi}$, pour contredire le théorème 2. Mais, par hypothèse,

$$TT + \underline{\Sigma} \vdash \psi^{+i} \leftrightarrow \psi^{+(i+1)} \ ,$$

pour tout i. Donc,

$$TT + \underline{\Sigma} + \underline{\psi} = TT + \underline{\Sigma} + \psi \ .$$

Corollaire.

Il n'existe pas de naturel k, tel que la théorie obtenue en ajoutant à TT les axiomes d'ambiguïté $\varphi \leftrightarrow \varphi^+$, $\varphi^+ \leftrightarrow \varphi^{++}$, ..., pour tout énoncé φ de L_k, soit la même que TT^* -si TT^* est cohérente.

Appendice.

Wang[10] a proposé d'étendre le langage de la théorie des types en introduisant des types négatifs. Il a découvert ainsi une nouvelle théorie des types, dont la formulation ne diffère de TT que par le fait que tout nombre entier y est un type. Il a établi la cohérence de cette théorie par un argument de compacité. Specker [9] remarqua que la théorie constituée par les formules de la théorie des types (formules qui ne mentionnent que des types positifs) démontrables dans la théorie négative, est une théorie intermédiaire entre TT et TT^*. Il signala également que cette théorie, que nous noterons TNP, peut se formuler en ajoutant à TT la règle de déduction : si φ^+ est un théorème, alors φ est un théorème. De cette manière, on voit que φ est un théorème de TNP ssi φ^{+k} est démontrable dans TT, pour au moins un naturel k.

Dans cette partie, nous étendrons le résultat du théorème 2 à TNP. Pour cela nous donnerons essentiellement une caractérisation axiomatique de TNP.

Définitions.

$\beth_0(x) = x$, $\beth_{i+1}(x) = 2^{\beth_i(x)}$ (x est de type ≥ 2).
$\diamond_n$ est l'énoncé $\exists\alpha \ \beth(\alpha) = \nu$.
On vérifie que chacun des énoncés $\diamond_n$ est de L_5.

Lemme.

$TNP \vdash \varphi$ ssi il existe un naturel n tel que $TT \vdash \diamond_n \rightarrow \varphi$.

Démonstration.

1. Supposons que $TNP \vdash \varphi$. Il existe un naturel n tel que $TT \vdash \varphi^{+n}$. Alors -en utilisant la proposition 1- on démontre successivement (dans TT) :
$$(\forall\alpha > 0)(\alpha \models \varphi^{+n}),\ \forall\alpha(\beth(\alpha) > 0 \rightarrow \beth(\alpha) \models \varphi)\ ,$$
$$\forall\alpha(\beth(\alpha) = \nu \rightarrow \nu \models \varphi)$$
et, donc, $\diamond_n \rightarrow \varphi$.
2. Par récurrence, on démontre, dans TT,
$$\beth(T\alpha) = T\beth(\alpha)\ , \text{ si } \beth_n(\alpha) \neq \emptyset\ ,$$
$$\beth(T^m\nu) = \nu^{+n} \text{ et } \exists\alpha \ \beth(\alpha) = \nu^{+n}\ .$$

Mais ce dernier énoncé n'est autre que $(\diamond_n)^{+n}$. Donc $TNP \vdash \diamond_n$.

Comme corollaire, nous obtenons le :

Théorème 3.

TNP est la théorie qui résulte de l'addition à TT des axiomes $\diamond_n$.

Théorème 2 (ter).

Il n'existe pas d'ensemble récursif d'énoncés de L_k, Σ, tel que $TNP+\Sigma$ soit cohérente et contienne TT^*.

Démonstration.

Immédiat par les théorèmes 2(bis), 3 et la remarque que tous les énoncés $\diamond_n$ sont de L_5.

Références

[1] BOFFA, Maurice, **Sets equipollent to their power set in** *NF*, Journal of Symbolic Logic, vol. 40(1975), pp. 149-150.

[2] BOFFA, Maurice, **The consistency problem for** *NF*, Journal of Symbolic Logic, vol. 42(1977), pp. 215-220.

[3] CRABBÉ, Marcel, **A propos de 2^{α}**, Cahiers du Centre de Logique (Louvain-la-Neuve), vol. 4(1982), pp. 17-22.

[4] CRABBÉ, Marcel, **Typical ambiguity and the axiom of choice**, Journal of Symbolic Logic, vol. 49(1984), pp. 1074-1078.

[5] FORSTER, Thomas, **Quine's new foundations**, Cahiers du Centre du Logique (Louvain-la-Neuve), vol. 5(1983).

[6] OREY, Steven, **New foundations and the axiom of counting**, Duke Mathematical Journal, vol. 31(1964), pp. 655-660.

[7] PÉTRY, André, **On the typed properties in Quine's "New Foundations"**, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 25(1979), pp. 99-102.

[8] SIERPIŃSKI, Wacław, **L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix**, Fundamenta Mathematicae, vol. 34(1947), pp. 1-5.

[9] SPECKER, Ernst, **Typical ambiguity**, Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress (publiée par Nagel, Suppes et Tarski), Stanford University Press(1962), pp. 116-124.

[10] WANG, Hao, **Negative Types**, Mind, vol. 61(1952), pp. 366-368.

[11] WANG, Hao, **Truth definitions and consistency proofs**, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 73(1952), pp. 243-275 (repris dans "A survey of mathematical logic" du même auteur).

Université Catholique de Louvain
Département de Philosophie
Chemin d'Aristote, 1
B-1348 Louvain-la-Neuve